

کد اجرا: نامشخص

تاریخ آزمون: ۱۴۰۳/۰۷/۱۳

نام و نام خانوادگی:

زمان برگزاری: ۱۲۰ دقیقه

نام آزمون: بی نام



پژوهندگان علم

۱- ضلع یک مثلث به مساحت ۶ بر خط به معادله $2y + x = 3$ واقع و یک رأس آن نقطه $(-1, 0)$ است. اگر ضلع دیگر این مثلث بر محور x ها منطبق باشد، طول میانه وارد بر این ضلع چه قدر است؟

- ① $4\sqrt{2}$ ② ۶ ③ $3\sqrt{3}$ ④ ۵

۲- دو انتهای یکی از قطرهای مستطیلی $A(1, 7)$ و $C(-4, 19)$ هستند. در صورتی که زاویه بین دو قطر مستطیل 30° باشد، مساحت مستطیل کدام است؟

- ① $\frac{169}{4}$ ② ۱۶۹ ③ $\frac{169\sqrt{3}}{4}$ ④ $\frac{169}{2}$

۳- سه نقطه $A|_3^\circ$ و $B|_3^\circ$ و $C|_3^\circ$ سه رأس مثلث ABC هستند. محل برخورد سه ارتفاع مثلث کدام است؟

- ① $|_3^\circ$ ② $|_2^\circ$ ③ $|_3^\circ$ ④ $|_1^\circ$

۴- دو ضلع یک مستطیل منطبق بر دو خط به معادلات $2y + x = 6$ و $2x - y = 7$ و یک رأس آن نقطه $A(8, 5)$ است. مساحت این مستطیل کدام است؟

- ① $7,2$ ② $9,6$ ③ $11,4$ ④ $12,8$

۵- دسته خطوط $(m+1)x + (2m-1)y + 2m + 5 = 0$ از نقطه ثابتی می گذرند. فاصله این نقطه از مبدأ مختصات کدام است؟

- ① $\sqrt{13}$ ② $\sqrt{15}$ ③ $\sqrt{17}$ ④ $\sqrt{19}$

۶- خط $2x + y = 4$ بر دایره‌ای به مرکز $O(1, 1)$ مماس است. اگر نقطه‌ای روی خط مماس داده شده باشد، طول مماس AM کدام است؟ (M نقطه‌ی تماس خط و دایره است.)

- ① $2\sqrt{5}$ ② $\sqrt{5}$ ③ $\frac{2\sqrt{5}}{5}$ ④ $\frac{\sqrt{5}}{5}$

۷- از نقطه‌ی $A(0, 2)$ خطی بر منحنی $x^2 + y^2 = 1$ مماس کرده‌ایم. مجموع شیب خطوط مماس کدام است؟

- ① صفر ② -۱ ③ ۱ ④ $\sqrt{2}$

۸- نقاط $A(1, 0)$ ، $B(6, 0)$ و $C(2, 2)$ رئوس یک مثلث هستند. اگر نیمساز داخلی زاویه C باشد، مختصات D کدام است؟

- ① $(\frac{8}{3}, 0)$ ② $(3, 0)$ ③ $(\frac{1}{3}, 0)$ ④ $(\frac{7}{3}, 0)$

۹- دایره‌ای محور l ها را در نقاطی با عرض ۲ و ۸ قطع کرده و بر خط $x = 2$ مماس است. شعاع این دایره کدام است؟

- ① $3,25$ ② ۳ ③ $3,5$ ④ $2,75$

۱۰- مساحت مثلثی با رئوس $A(1, 1)$ و $B(2, 3)$ و $C(k, -1)$ برابر ۳ است. مقادیر k کدام‌اند؟

- ① -۵ یا ۱ ② -۱ یا ۳ ③ -۳ یا ۳ ④ -۳ یا ۵



۱۱- دو خط $L_1: 2x + y = 1$ و $L_2: x - 2y = 0$ بر دایره‌ای به مرکز $O(\alpha, -2\alpha)$ مماسند، فاصله مرکز دایره تا نقطه تقاطع این دو خط کدام است؟

④ $\sqrt{5}$

③ $\sqrt{\frac{2}{5}}$

② $\sqrt{\frac{5}{2}}$

① $\sqrt{2}$

۱۲- هرگاه نقاط $A|_{-2}^1$ و $C|_{-3}^1$ دو رأس مقابل لوزی $ABCD$ باشند، معادله خط قطر BD این لوزی، محور طول‌ها را با کدام طول قطع می‌کند؟

④ -2

③ 2

② -1

① 1

۱۳- دو سر قطر یک مربع روی دو خط $\begin{cases} 2x - 4y + 5 = 0 \\ x - 2y + 3 = 0 \end{cases}$ است. مساحت کوچک‌ترین مربع ممکن چقدر است؟

④ $\frac{1}{40}$

③ $\frac{1}{20}$

② $\frac{1}{10}$

① $\frac{1}{4}$

۱۴- دو نقطه‌ی $A(-4, 7)$ و $B(1, 5)$ دو سر قطری از دایره هستند. معادله‌ی قطری از دایره که از مبدأ مختصات می‌گذرد کدام است؟

④ $2y - 5x = 0$

③ $y - 4x = 0$

② $5y - 2x = 0$

① $y + 4x = 0$

۱۵- خطوط به معادله $(m+1)x + (2m-4)y = 6$ از نقطه ثابت $A|_{\frac{a}{b}}$ عبور می‌نمایند. $a^2 + b^2$ کدام است؟

④ 6

③ 5

② 4

① 3

۱۶- نقاط $(0, 0)$ ، $(0, 2)$ و $(4, 0)$ مختصات رئوس مثلث قائم‌الزاویه ABC هستند. اگر M و H پای میانه و ارتفاع وارد بر وتر باشند، طول MH چقدر است؟

④ $\frac{4\sqrt{5}}{5}$

③ $\frac{3\sqrt{5}}{5}$

② $\frac{2\sqrt{5}}{5}$

① $\sqrt{5}$

۱۷- نقاط $A(2, -2)$ و $B(6, 4)$ دو انتهای یکی از قطرهای یک دایره هستند. کدام نقطه روی محیط دایره قرار دارد؟

④ $(5, 4)$

③ $(6, 6)$

② $(7, 3)$

① $(3, 7)$

۱۸- فاصله دو خط موازی $y = \frac{a}{6}x + 4$ و $y = -\frac{b}{3}x - 1$ برابر ۳ است. حاصل ab کدام است؟

④ 32

③ -32

② 16

① -16

۱۹- چند خط می‌توان رسم کرد که از نقطه $A|_{\frac{1}{2}}$ بگذرد و با محورهای مختصات در ناحیه اول، مثلثی به مساحت $\frac{9}{2}$ بسازد؟

④ 4

③ 3

② 2

① صفر

۲۰- مستطیلی داریم که دو ضلع آن بر خطوط $2x - y = 5$ و $2y + x = 3$ و یک رأس آن نقطه $A(4, -1)$ هست. اگر وسط اضلاع این مستطیل را به طور متوالی به هم وصل کنیم، مساحت چهارضلعی حاصل کدام است؟

④ 0.2

③ 0.4

② 0.8

① 1.6

۲۱- قطر مربعی منطبق بر نیمساز ناحیه دوم و چهارم و یک رأس آن نقطه $(3, -2)$ است. مساحت این مربع کدام است؟

④ $\frac{1}{\sqrt{2}}$

③ 1

② $\sqrt{2}$

① 2



۲۲- نقطه B ، قرینه نقطه $A = \begin{bmatrix} a \\ 4 \end{bmatrix}$ نسبت به نقطه $O = \begin{bmatrix} 2 \\ -1 \end{bmatrix}$ است و فاصله نقطه B از خط $x + 2y = 3$ برابر $\frac{\sqrt{5}}{5}$ است. مجموع مقادیر ممکن برای a کدام است؟

- ① -۲ ② ۲ ③ -۲۲ ④ -۱۰

۲۳- اگر نقطه $A'(k, -3k + 1)$ قرینه نقطه $A(5, m - 1)$ نسبت به مبدأ مختصات باشد، آنگاه مقدار $m - k$ کدام است؟

- ① ۱۰ ② -۱۰ ③ ۲۰ ④ -۲۰

۲۴- اگر $A(2, 0)$ ، $B(5, 4)$ و $C(-1, 3)$ رأس‌های مثلث ABC باشند، معادله ارتفاع وارد بر ضلع BC کدام است؟

- ① $y = -6x + 12$ ② $y = -6x + 2$ ③ $y = 6x - 12$ ④ $y = 6x - 2$

۲۵- اگر دو خط $y = 4x + 2$ و $y = 4x + m^2 - 7$ ، بر دو ضلع مقابل یک متوازی‌الاضلاع منطبق باشند، آنگاه کدام گزینه صحیح است؟

- ① m هر عددی می‌تواند باشد. ② m هر عددی می‌تواند باشد به جز ۳
③ m هر عددی می‌تواند باشد به جز -۳ ④ m هر عددی می‌تواند باشد به جز ۳ و -۳

۲۶- دو ضلع مقابل متوازی‌الاضلاع $ABCD$ روی دو خط $4x + ky = 2$ و $8x + 6y = 6$ قرار دارند. اگر نقاط A و B محل‌های برخورد خط $8x + 6y = 6$ با محورهای مختصات باشند، مساحت این متوازی‌الاضلاع کدام است؟

- ① ۲ ② $\frac{1}{2}$ ③ $\frac{13}{10}$ ④ $\frac{1}{4}$

۲۷- مساحت مثلثی با رأس‌های $A(-1, 2)$ ، $B(2, 4)$ و $C(4, -1)$ برابر است با:

- ① ۱۹ ② $\frac{19}{2}$ ③ ۹ ④ ۳۸

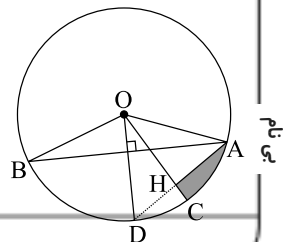
۲۸- از برخورد خطوط $y + 2x = 1$ ، $y - x = 2$ و $2y - x = 2$ و $y + 4 = 3x$ با یک‌دیگر مثلثی پدید می‌آید. مساحت این مثلث کدام است؟

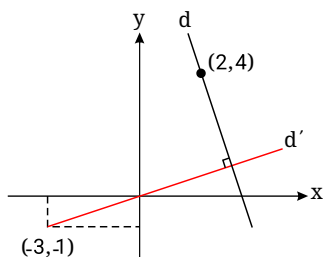
- ① ۵ ② $\frac{5}{2}$ ③ ۱ ④ $\frac{\sqrt{10}}{2}$

۲۹- نقاط $A(1, 4)$ و $B(0, 2)$ و $C(-1, -1)$ سه رأس مثلثی می‌باشند. طول ارتفاع وارد بر ضلع AB کدام است؟

- ① $\sqrt{5}$ ② $\frac{\sqrt{5}}{5}$ ③ $2\sqrt{5}$ ④ $2\frac{\sqrt{5}}{5}$

۳۰- مطابق شکل زیر، در دایره‌ای به مساحت π ، $\angle AOB = 120^\circ$ و OH عمود منصف AD است. اختلاف محیط مثلث AOH و محیط قسمت سایه زده شده کدام است؟





۳۱- در شکل زیر معادله خط d کدام است؟

① $y = -2x + 10$

② $y = -3x + 10$

③ $y = -3x + 8$

④ $y = -2x + 8$

۳۲- مثلث ABC که مختصات رأس‌های آن $A(3, 5)$ ، $B(3, -1)$ و $C(7, 2)$ است، چگونه است؟

① متساوی‌الساقین

② متساوی‌الاضلاع

③ مختلف‌الاضلاع

④ قائم‌الزاویه

۳۳- نقطه‌ی $O(2\alpha, \alpha + 1)$ مرکز دایره‌گذرنده بر دو نقطه $A(0, 2)$ و $B(2, 0)$ می‌باشد. شعاع دایره کدام است؟

① ۱

② ۲

③ $\sqrt{5}$

④ $\sqrt{3}$

۳۴- خط $y = (m + 2)x + n$ از نقطه $A(1, 6)$ می‌گذرد و مساحت محدود به این خط و محورهای مختصات برابر ۴ است. مجموع مقادیر ممکن برای m کدام است؟

① ۱۲

② -۸

③ -۴

④ ۱۶

۳۵- از نقطه A با مختصات $\begin{vmatrix} a \\ 2a + 1 \end{vmatrix}$ خطی موازی خط $y = 2x + 5$ رسم می‌کنیم تا به نقطه B با مختصات $\begin{vmatrix} \alpha \\ \beta \end{vmatrix}$ برسیم. رابطه بین α و β کدام است؟

① $\alpha = \frac{\beta - 1}{2}$

② $\alpha = \frac{\beta + 1}{2}$

③ $\beta = \frac{\alpha - 1}{2}$

④ $\beta = \frac{\alpha + 1}{2}$

۳۶- معادله خطی که با خط $2x - y = 3$ موازی بوده و نیمساز ناحیه دوم و چهارم را در نقطه‌ای به عرض ۵ قطع می‌کند، به صورت $y = ax + b$ حاصل $a + b$ کدام است؟

① ۱۷

② -۱۳

③ ۸

④ -۷

۳۷- سه نقطه $A(4, -2)$ ، $B(-1, k)$ و $C(3, 1)$ روی یک خط قرار دارند. طول پاره خط AB کدام است؟

① $5\sqrt{10}$

② $5\sqrt{5}$

③ $\sqrt{130}$

④ $\sqrt{236}$

۳۸- اگر $A\left(1, \frac{3}{2}\right)$ ، $B(-4, -1)$ و $C(-3, -3)$ ، سه رأس مستطیل $ABCD$ باشند، رأس D مستطیل روی کدام یک از خطوط زیر واقع است؟

① $3y = 4x + 8$

② $6y = 4x - 11$

③ $y = x + \frac{3}{2}$

④ $y = 2x - \frac{3}{2}$

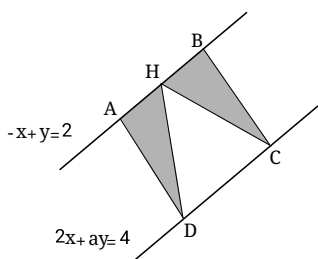
۳۹- در شکل زیر، چهارضلعی $ABCD$ مربع و مثلث DCH متساوی‌الساقین است. مساحت قسمت هاشورخورده کدام است؟

① ۴

② $\sqrt{8}$

③ ۸

④ ۲





۴۰- فاصله‌ی بین دو خط با معادلات $5x - 12y + 8 = 0$ و $-10x + 24y + 10 = 0$ کدام است؟

- ① $\frac{3}{13}$ ② ۱ ③ $\frac{3}{2}$ ④ ۳

۴۱- نقطه $A(2m, m+3)$ روی خطی که از نقاط $B(2m+1, m-1)$ و $C(3m-1, 4-2m)$ می‌گذرد، قرار دارد. نقطه $D(\frac{m}{3}, m-3)$ روی کدام خط زیر قرار دارد؟

- ① $y = 5x + 5$ ② $y = 3x + 6$ ③ $y = 5x - 5$ ④ $y = 3x - 6$

۴۲- فاصله دو خط موازی $2x - my = 4$ و $4x + 2y = k$ برابر $2\sqrt{5}$ است. حاصل $m + k$ کدام می‌تواند باشد؟

- ① ۱۲ ② -۲۸ ③ -۲۷ ④ -۱۳

۴۳- نقاط $A(1, 0)$ ، $B(6, 0)$ و $C(2, 2)$ رئوس یک مثلث هستند. اگر CD نیمساز داخلی زاویه C باشد، مختصات D کدام است؟ (D محل برخورد نیمساز $\hat{C}$ با ضلع AB است.)

- ① $(\frac{1}{3}, 0)$ ② $(3, 0)$ ③ $(\frac{1}{3}, 0)$ ④ $(\frac{7}{3}, 0)$

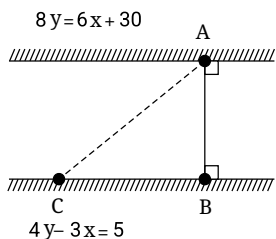
۴۴- فاصله نقطه M از نقطه A برابر $3 - 4x$ و از نقطه B برابر $9 - x - x^2$ است. اگر نقطه M روی عمودمنصف قرار داشته و فاصله M تا وسط پاره خط AB برابر ۹ باشد، طول پاره خط AB کدام است؟

- ① $6\sqrt{10}$ ② $12\sqrt{10}$ ③ $8\sqrt{10}$ ④ $16\sqrt{10}$

۴۵- هرگاه نقاط $B|_1^3$ و $D|_7^0$ دو رأس مقابل لوزی $ABCD$ باشند، خط منطبق بر قطر AC این لوزی، محور عرض‌ها را با کدام عرض قطع می‌کند؟

- ① ۳ ② $3,25$ ③ ۴ ④ $4,25$

۴۶- شخصی می‌خواهد از نقطه A بالای رودخانه‌ای به نقطه B در پایین رودخانه برود. جریان آب رودخانه، وی را به نقطه C در ۴ کیلومتری نقطه B هدایت می‌کند. نقطه C چقدر از A فاصله دارد؟ (x و y برحسب کیلومتر است.)



- ① $\sqrt{5}$ ② $2\sqrt{5}$ ③ $4\sqrt{5}$ ④ ۲۰

۴۷- در یک لوزی قطر بزرگ دو برابر قطر کوچک است. اگر معادله قطر کوچک $3x - 4y + 1 = 0$ و یک رأس لوزی $(-1, 2)$ باشد، محیط لوزی کدام است؟

- ① $4\sqrt{5}$ ② $2\sqrt{5}$ ③ ۴ ④ ۲

۴۸- اگر فاصله نقطه $A(2, -3)$ از خط $12x + 5y = 15$ برابر $7a + 1$ باشد، مقدار a کدام است؟

- ① $\frac{49}{13}$ ② $\frac{1}{13}$ ③ $-\frac{49}{13}$ ④ $-\frac{1}{13}$

۴۹- اگر یک ضلع مربعی منطبق بر خط به معادله $y = x + 2$ و نقطه‌ی $A(3, -1)$ یک رأس آن باشد، مساحت مربع کدام است؟

- ① ۱۸ ② ۳۶ ③ ۹ ④ $\frac{6}{\sqrt{2}}$



۵۰- خط $6x - 8y = 0$ بر دایره‌ای به مرکز $W(2, -1)$ مماس است. اندازه‌ی شعاع دایره کدام است؟

- ① ۱ ② ۲ ③ ۴ ④ ۹

۵۱- خط گذرنده بر دو نقطه‌ی $A(2m + 1, n)$ و $B(n + 1, 2m)$ بر کدام گزینه همواره عمود است؟

- ① $2x + 3y = 5$ ② $x + y = 3m$
③ $-2x - n = 2y$ ④ $(m + 1)x = (m + 1)y + 1$

۵۲- نقاط $A(2, -1)$ ، $B(-3, 4)$ و $C(0, -6)$ رئوس متوازی‌الاضلاع $ABCD$ هستند. فاصله‌ی رأس D از مبدأ مختصات کدام است؟

- ① $\sqrt{146}$ ② $\sqrt{138}$ ③ $\sqrt{148}$ ④ $\sqrt{136}$

۵۳- دو خط $y = \frac{3}{4}x - 2$ و $6x - 8y + 10 = 0$ بر دایره‌ی C مماس شده‌اند. شعاع این دایره چقدر است؟

- ① $2,6$ ② $3,2$ ③ $1,3$ ④ $1,6$

۵۴- نقاط $A(2, -4)$ ، $B(-3, 5)$ و $C(6, -1)$ سه رأس متوازی‌الاضلاع $ABCD$ هستند. مجموع فاصله‌ی نقطه‌ی D از محورهای مختصات کدام است؟

- ① ۱ ② ۱۸ ③ ۲ ④ ۲۱

۵۵- دو ضلع مربعی بر خطوط $4y = 2 - 3x$ و $y = \frac{3x}{4} - 1$ واقع می‌شوند. اندازه‌ی قطر مربع کدام است؟

- ① $\frac{2\sqrt{2}}{5}$ ② $\frac{4\sqrt{2}}{5}$ ③ $\frac{\sqrt{2}}{5}$ ④ $\frac{3\sqrt{2}}{5}$

۵۶- دایره‌ای از دو نقطه‌ی $A(0, 2)$ و $B(1, 0)$ گذشته و معادله‌ی یک قطر آن $y - x = 1$ است. شعاع دایره کدام است؟

- ① $\frac{\sqrt{2}}{4}$ ② $\frac{\sqrt{10}}{2}$ ③ $\frac{\sqrt{10}}{4}$ ④ $\frac{\sqrt{2}}{2}$

۵۷- اگر $A(x - 2, 0)$ و $B(x, 2x)$ و فاصله‌ی نقطه‌ی M وسط AB ، از مبدأ مختصات $\sqrt{5}$ باشد، مقادیر x کدام‌اند؟

- ① $-1, 2$ ② $-2, 1$ ③ $-1, 3$ ④ $-3, 2$

۵۸- فاصله‌ی دو خط موازی $x - 3y = k$ و $6y + mx = 5$ برابر $2\sqrt{10}$ است. اختلاف مقادیر ممکن برای k کدام است؟

- ① ۴۰ ② ۲۰ ③ ۳۵ ④ ۴۵

۵۹- نقاط $A(k, 1)$ ، $B(3, -1)$ و $C(0, 3)$ رئوس مثلث ABC هستند. اگر مثلث در رأس C متساوی‌الساقین باشد، مقدار k کدام است؟

- ① $\pm 2\sqrt{3}$ ② ± 5 ③ $\pm \sqrt{21}$ ④ $\pm \sqrt{19}$

۶۰- خطی که از دو نقطه‌ی $A(2, 5)$ و $B(-2, -3)$ می‌گذرد، با خط $y = x - 4$ در نقطه‌ی (α, β) متقاطع است. $\alpha\beta$ کدام است؟

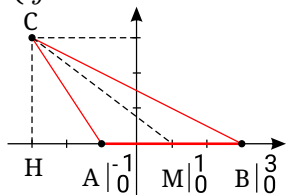
- ① -35 ② ۳۵ ③ -45 ④ ۴۵



پاسخنامه تشریحی

۱ - گزینه ۴ اگر خط به معادله $2y + x = 3$ را با محور x ها تلافی دهیم، مختصات رأس دیگر مثلث به دست می آید.

$$\begin{cases} 2y + x = 3 \\ y = 0 \end{cases} \rightarrow x = 3$$



بنابراین نقاط $A \begin{vmatrix} -1 \\ 0 \end{vmatrix}$ و $B \begin{vmatrix} 3 \\ 0 \end{vmatrix}$ دو رأس این مثلث هستند.

$$S_{\triangle ABC} = \frac{CH \times AB}{2} \rightarrow 6 = \frac{CH \times 4}{2} \rightarrow CH = 3$$

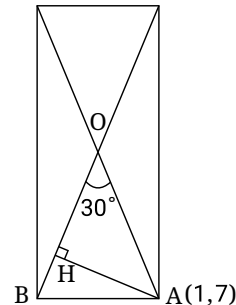
اندازه پاره خط CH برابر ۳ می باشد، بنابراین عرض رأس C برابر ۳ است.

$$\begin{cases} 2y + x = 3 \\ y = 3 \end{cases} \rightarrow x = -3 \rightarrow C \begin{vmatrix} -3 \\ 3 \end{vmatrix}$$

$$CM = \sqrt{(-3-1)^2 + (3-0)^2} = \sqrt{16+9} = \sqrt{25} = 5$$

۲ - گزینه ۱ ابتدا طول قطر AC را به دست می آوریم:

$C(-4, 19)$ D



$$\rightarrow AC = \sqrt{(x_A - x_C)^2 + (y_A - y_C)^2} = \sqrt{(1 - (-4))^2 + (7 - 19)^2}$$

$$= \sqrt{25 + 144} = \sqrt{169} \rightarrow AC = 13$$

و چون در مستطیل قطرها هم دیگر را نصف می کنند داریم:

$$OA = OC = OB = OD = \frac{13}{2}$$

قطرهای مستطیل، مستطیل را به چهار مثلث هم مساحت تقسیم می کنند پس داریم:

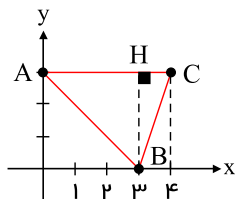
$$S_{ABCD} = 4S_{OAB} \rightarrow S_{ABCD} = 4\left(\frac{1}{2} \times OA \times OB \times \sin 30^\circ\right) = 4\left(\frac{1}{2} \times \frac{13}{2} \times \frac{13}{2} \times \frac{1}{2}\right) = \frac{169}{4}$$

توجه کنید مساحت هر مثلث را می توان از نصف حاصل ضرب دو ضلع در سینوس زاویه بین آن ها به دست آورد.

۳ - گزینه ۲

با داشتن سه نقطه A ، B و C مثلث را رسم می کنیم.

از روی شکل واضح است که حتماً محل تلاقی ارتفاع ها روی خط $x = 3$ است و در گزینه ها تنها نقطه ای که طولش برابر ۳ باشد، گزینه ۲ است.



البته راه حل کلی این تست این است که معادله دو ارتفاع دلخواه را نوشته و سپس آنها را با هم تلافی دهیم.

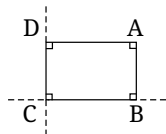


$$m_{BC} = \frac{3-0}{4-3} = 3 \Rightarrow m_{AK} = -\frac{1}{3} \Rightarrow (AK \text{ ارتفاع}) y = -\frac{1}{3}x + 3$$

$$\begin{cases} x = 3 \\ y = -\frac{1}{3}x + 3 \Rightarrow y = -1 + 3 = 2 \Rightarrow \end{cases} \text{نقطه برخورد ارتفاعها } (3, 2) \text{ است.}$$

۴ - گزینه ۲

$$2y + x = 6 \rightarrow m = -\frac{1}{2}, \quad 2x - y = 7 \rightarrow m' = 2$$



چون شیبها عکس و قرینه‌ی هم هستند این دو خط بر هم عمودند و نقطه‌ی A در معادله‌ی هیچ کدام از این دو خط صدق نمی‌کند پس می‌توان شکل را در این گونه در نظر گرفت.

برای یافتن طول و عرض مستطیل کافی است فاصله‌ی نقطه‌ی A را از این دو خط بدست آوریم.

$$\left. \begin{aligned} A \begin{vmatrix} 8 \\ 5 \end{vmatrix}, \quad x + 2y - 6 = 0 \rightarrow AD &= \frac{|8 + 10 - 6|}{\sqrt{1+4}} = \frac{12}{\sqrt{5}} \\ A \begin{vmatrix} 8 \\ 5 \end{vmatrix}, \quad 2x - y - 7 = 0 \rightarrow AB &= \frac{|16 - 5 - 7|}{\sqrt{1+4}} = \frac{4}{\sqrt{5}} \end{aligned} \right\} \Rightarrow \text{مساحت مستطیل} = AD \times AB = \frac{48}{5} = 9.6$$

$$\text{توجه کنید فاصله‌ی نقطه‌ی } A \begin{vmatrix} \alpha \\ \beta \end{vmatrix} \text{ از خط به معادله‌ی } 0 = ax + by + c \text{ از رابطه‌ی } AH = \frac{|a\alpha + b\beta + c|}{\sqrt{a^2 + b^2}} \text{ بدست می‌آید.}$$

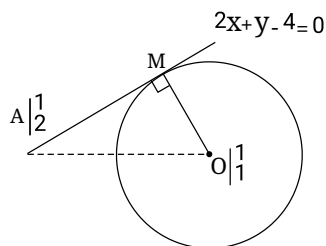
۵ - گزینه ۳ برای پیدا کردن نقطه ثابت دسته خطوط کافی است به m دو مقدار مختلف داده و با دو خط به دست آمده تشکیل دستگاه دهیم و x, y را پیدا کنیم.

$$\begin{aligned} m = -1 \rightarrow -3y - 2 + 5 = 0 \rightarrow y &= 1 \\ m = \frac{1}{2} \rightarrow \frac{3}{2}x + 1 + 5 = 0 \rightarrow x &= -4 \rightarrow A \begin{vmatrix} -4 \\ 1 \end{vmatrix} \text{ نقطه ثابت} \end{aligned}$$

$$A \begin{vmatrix} -4 \\ 1 \end{vmatrix}, O \begin{vmatrix} 0 \\ 0 \end{vmatrix} \rightarrow AO = \sqrt{16 + 1} = \sqrt{17}$$

۶ - گزینه ۳

ابتدا می‌توان یک تصویر کلی را رسم نمود.



باتوجه به تصویر ابتدا شعاع دایره یا OM را محاسبه می‌کنیم:

$$2x + y - 4 = 0, \quad a = 2, b = 1, c = -4, \quad x_0 = 1, y_0 = 1$$

$$d = OM = \frac{|ax_0 + by_0 + c|}{\sqrt{a^2 + b^2}} = \frac{|2(1) + 1(1) - 4|}{\sqrt{1^2 + 2^2}} = \frac{1}{\sqrt{5}} = \frac{\sqrt{5}}{5}$$

حال با استفاده از فرمول فاصله‌ی دو نقطه طول OA را محاسبه می‌نماییم:

$$OA = \sqrt{(x_A - x_O)^2 + (y_A - y_O)^2} \rightarrow OA = \sqrt{(1-1)^2 + (2-1)^2} = 1$$

باتوجه به فیثاغورث داریم:

$$AM^2 = OA^2 - OM^2 = 1^2 - \left(\frac{\sqrt{5}}{5}\right)^2 = 1 - \frac{1}{5} = \frac{4}{5} \rightarrow AM = \frac{2}{\sqrt{5}} = \frac{2\sqrt{5}}{5}$$

۷ - گزینه ۱ ابتدا معادله‌ی خط مماس را با شیب مجهول m می‌نویسیم.

$$y - 2 = m(x - 0) \rightarrow y = mx + 2$$

حال معادله‌ی برخورد خط و منحنی را تشکیل می‌دهیم.



$$\begin{cases} x^r + y^r = 1 \\ y = mx + r \end{cases} \rightarrow x^r + (mx + r)^r = 1 \rightarrow x^r + m^r x^r + r^r mx + r = 1$$

$$(m^r + 1)x^r + r^r mx + r = 0.$$

$$\Delta = 0$$

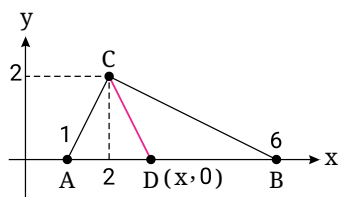
چون منحنی و خط به هم مماس شده‌اند پس

$$\Delta = 16m^r - r^r(m^r + 1)(r) = 0 \rightarrow 16m^r - 12m^r - 12 = 0$$

$$4m^r = 12 \rightarrow m^r = 3 \rightarrow m = \pm\sqrt[3]{3}$$

پس مجموع مقادیر m برابر صفر است.

۸ - گزینه ۱ اول: شکل را ببینید:



دوم: معادله خطوط AC و CB را می‌یابیم. فاصله نقطه D از هر دو خط برابر است.

$$A(1,0), C(2,2) \Rightarrow AC: y - 0 = \frac{2-0}{2-1}(x-1) \Rightarrow y = 2x - 2$$

$$C(2,2), B(6,0) \Rightarrow BC: y - 0 = \frac{0-2}{6-2}(x-6) \Rightarrow y = -\frac{1}{2}x + 3$$

سوم: فاصله D از هر دو خط: $D(x,0)$

$$\begin{aligned} y - 2x + 2 &= 0 \\ y + \frac{1}{2}x - 3 &= 0 \end{aligned} \Rightarrow \frac{|-2x + 2|}{\sqrt{4+1}} = \frac{|\frac{1}{2}x - 3|}{\sqrt{\frac{1}{4}+1}}$$

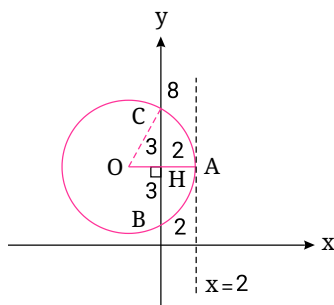
$$\frac{|-2x + 2|}{\sqrt{5}} = \frac{|x - 6|}{\sqrt{5}} \Rightarrow \begin{cases} -2x + 2 = x - 6 \Rightarrow x = \frac{8}{3} \\ -2x + 2 = 6 - x \Rightarrow x = -4 \end{cases}$$

معلوم است که $x = \frac{8}{3}$ صحیح است.

۹ - گزینه ۱

اول: دایره‌ای با این مشخصات رسم می‌کنیم:

خط OA بر وتر جدا شده روی محور y ها عمود است. فاصله $HA = 2$ است و $HC = HB = 3$ است.



دوم: شعاع دایره OA است و داریم:

$$OA = OH + 2$$

از طرفی شعاع دایره OC است و داریم:

$$OC = \sqrt{OH^2 + 3^2}$$

$$OH + 2 = \sqrt{OH^2 + 9} \Rightarrow OH^2 + 4OH + 4 = OH^2 + 9 \Rightarrow OH = \frac{5}{2} = 1.25$$



سوم: پس شعاع دایره برابر است با:

$$OA = OH + r = 1,25 + 2 = 3,25$$

۱۰ - گزینه ۳ هرگاه مختصات سه رأس مثلث ABC را داشته باشیم مساحت مثلث از این رابطه به دست می‌آید.

$$S = \frac{1}{2} |x_A(y_B - y_C) + x_B(y_C - y_A) + x_C(y_A - y_B)|$$

$$\rightarrow 3 = \frac{1}{2} |1(3+1) + 2(-1-1) + k(1-3)|$$

$$\rightarrow 6 = |4 - 4 + 2k| \rightarrow |2k| = 6 \rightarrow 2k = \pm 6 \rightarrow k = \pm 3$$

۱۱ - گزینه ۳ راه حل اول:

چون دو خط بر دایره مماس هستند فاصله هر دو از مرکز دایره یکسان است:

$$O \begin{vmatrix} \alpha \\ -2\alpha \end{vmatrix}$$

$$\left. \begin{aligned} L_1 : rx + y - 1 = 0 \rightarrow d &= \frac{|2\alpha - 2\alpha - 1|}{\sqrt{2^2 + 1^2}} = \frac{1}{\sqrt{5}} \\ L_2 : x - 2y = 0 \rightarrow d &= \frac{|\alpha - 2(-2\alpha)|}{\sqrt{1^2 + (-2)^2}} = \frac{5\alpha}{\sqrt{5}} \end{aligned} \right\} \Rightarrow |5\alpha| = 1 \rightarrow \alpha = \pm \frac{1}{5}$$

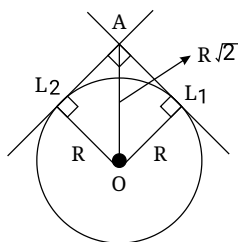
در نتیجه دو مقدار برای O داریم:

$$\rightarrow O \begin{vmatrix} \frac{1}{5} \\ -\frac{2}{5} \end{vmatrix}, O \begin{vmatrix} -\frac{1}{5} \\ \frac{2}{5} \end{vmatrix}$$

$$\text{محل تقاطع دو خط} \begin{cases} 2x + y = 1 \\ x - 2y = 0 \end{cases} \rightarrow 2(2y) + y = 1 \rightarrow 5y = 1 \rightarrow y = \frac{1}{5}, x = \frac{2}{5}$$

$$\rightarrow A \begin{vmatrix} \frac{2}{5} \\ \frac{1}{5} \end{vmatrix} \rightarrow \begin{cases} OA = \sqrt{(\frac{2}{5} - \frac{1}{5})^2 + (\frac{1}{5} - (-\frac{2}{5}))^2} = \sqrt{\frac{1}{25} + \frac{9}{25}} = \sqrt{\frac{10}{25}} = \sqrt{\frac{2}{5}} \\ OA = \sqrt{(\frac{2}{5} - (-\frac{1}{5}))^2 + (\frac{1}{5} - \frac{2}{5})^2} = \sqrt{\frac{9}{25} + \frac{1}{25}} = \sqrt{\frac{10}{25}} = \sqrt{\frac{2}{5}} \end{cases}$$

با توجه به شیب دو خط L_1 و L_2 می‌توان گفت این دو خط بر یکدیگر عمودند. با وصل کردن نقطه O (مرکز دایره) به نقاط تماس دایره با دو خط L_1 و L_2 مربعی به قطر $R\sqrt{2}$ تشکیل می‌شود که همان فاصله مرکز دایره تا نقطه تقاطع دو خط L_1 و L_2 است. پس کافی است، شعاع دایره را بدست آوریم.



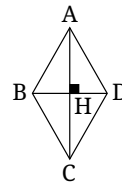
برای این کار فاصله مرکز دایره تا دو خط L_1 و L_2 را برابر هم قرار می‌دهیم:

$$\frac{|\alpha + 2\alpha|}{\sqrt{5}} = \frac{|2\alpha - 2\alpha - 1|}{\sqrt{5}} \Rightarrow \alpha = \pm \frac{1}{5} \Rightarrow R = \frac{1}{\sqrt{5}}$$

$$OA = R\sqrt{2} = \sqrt{\frac{2}{5}}$$



۱۲ - گزینه ۲ در لوزی قطر ها بر هم عمودند و یکدیگر را نیز نصف می کنند. بنابراین وسط AC وسط قطر ها است.



$$H \text{ وسط } AC \left| \begin{array}{l} \frac{1+(-2)}{2} = -1 \\ \frac{2+(-2)}{2} = 0 \end{array} \right.$$

قطر BD بر قطر AC عمود است، پس کافی است شیب قطر AC را پیدا کرده و آن را قرینه معکوس کنیم تا شیب قطر BD به دست آید.

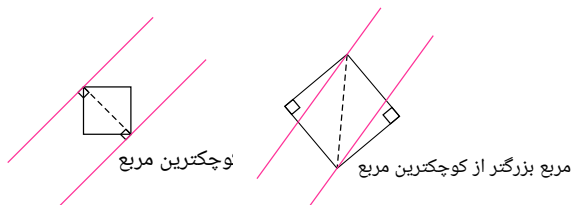
$$m_{AC} = \frac{y_A - y_C}{x_A - x_C} = \frac{-2 - 2}{1 + 3} = -1 \Rightarrow m_{BD} = 1$$

حال، با داشتن نقطه H و شیب، معادله قطر BD را می نویسیم.

$$H \left| \begin{array}{l} -1 \\ 0 \end{array} \right., m_{BD} = 1 \rightarrow y - 0 = 1(x + 1) \xrightarrow{y=0} x = -1$$

(در نقطه برخورد با محور طول ها $y = 0$ است.)

۱۳ - گزینه ۴ راهنمایی: کوچک ترین مساحت مربوط به کوتاه ترین قطر است و کوتاه ترین فاصله بین دو نقطه از دو خط موازی، همان فاصله بین دو خط است:



اول: طبق راهنمایی دو خط داده شده موازی هستند. کوتاه ترین قطر، فاصله بین دو خط موازی است.

دوم: فاصله بین دو خط موازی را می یابیم:

$$\begin{cases} 2x - 4y + 5 = 0 \\ x - 2y + 3 = 0 \Rightarrow 2x - 4y + 6 = 0 \end{cases}$$

$$\Rightarrow \text{فاصله بین خطوط} = \frac{|6 - 5|}{\sqrt{2^2 + 4^2}} = \frac{1}{\sqrt{20}}$$

سوم: اگر قطر یک مربع d باشد، مساحت آن $\frac{d^2}{2}$ است.

$$S = \frac{\left(\frac{1}{\sqrt{20}}\right)^2}{2} = \frac{1}{40}$$

۱۴ - گزینه ۱ ابتدا با استفاده از مختصات دو سر قطر، مختصات مرکز دایره را محاسبه می کنیم. مرکز دایره وسط قطر قرار دارد پس:

$$O' \left| \begin{array}{l} x_O = \frac{x_A + x_B}{2} = \frac{-4 + 1}{2} = -\frac{3}{2} \\ y_O = \frac{y_A + y_B}{2} = \frac{7 + 5}{2} = 6 \end{array} \right. \Rightarrow O' \left| \begin{array}{l} -\frac{3}{2} \\ 6 \end{array} \right.$$

حال باید معادله خطی را بنویسیم که از نقاط O' و مبدأ مختصات O عبور می نماید. ابتدا شیب را محاسبه می نماییم.

$$m = \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{6 - 0}{-\frac{3}{2} - 0} = -4 \Rightarrow y - y_0 = m(x - x_0) \Rightarrow y - 0 = -4(x - 0)$$

$$\Rightarrow y = -4x \Rightarrow \boxed{y + 4x = 0}$$

۱۵ - گزینه ۳ چون همه خطوط به ازای مقادیر مختلف m از یک نقطه ثابت عبور می نمایند، می توان با اختصاص دو مقدار به m مختصات نقطه A را محاسبه نمود:

$$(m + 1)x + (2m - 4)y = 6$$

$$m = -1 \rightarrow -6y = 6 \rightarrow y = -1 \Rightarrow A(2, -1) \rightarrow a^2 + b^2 = 5$$

$$m = 2 \rightarrow 3x = 6 \rightarrow x = 2$$

۱۶ - گزینه ۳ راجع اول:

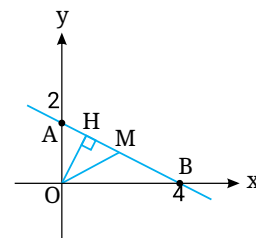


$$M = \left(\frac{4+0}{2}, \frac{2+0}{2} \right) = (2, 1)$$

$$AB \text{ معادله خط: } y - 0 = \frac{0-2}{4-0}(x-4) \Rightarrow y = -\frac{x}{2} + 2$$

$$m_{OH} = -\frac{1}{m_{AB}} = \frac{-1}{-\frac{1}{2}} = 2$$

$$OH \text{ معادله خط: } y - 0 = 2(x - 0) \Rightarrow y = 2x$$



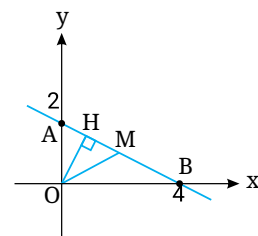
از تلاقی دو خط OH و AB مختصات نقطه H را به دست آورید.

$$2x = \frac{-x}{2} + 2 \Rightarrow \frac{5}{2}x = 2 \Rightarrow x = \frac{4}{5} \Rightarrow H = \left(\frac{4}{5}, \frac{8}{5} \right)$$

$$HM = \sqrt{\left(2 - \frac{4}{5}\right)^2 + \left(1 - \frac{8}{5}\right)^2} = \sqrt{\frac{36}{25} + \frac{9}{25}} = \sqrt{\frac{45}{25}} = \frac{3\sqrt{5}}{5}$$

راه حل دوم: در مثلث قائم الزاویه طول میانه وارد بر وتر برابر نصف طول وتر است. طول وتر از رابطه فیثاغورس برابر است با:

$$AB = \sqrt{2^2 + 4^2} = \sqrt{20} = 2\sqrt{5}$$



پس $OM = \sqrt{5}$ است. ضمناً ارتفاع وارد بر وتر برابر است با حاصل ضرب اضلاع قائم تقسیم بر وتر:

$$OH = \frac{2 \times 4}{2\sqrt{5}} = \frac{4}{\sqrt{5}}$$

بنابراین با نوشتن رابطه فیثاغورس در مثلث OHM داریم:

$$HM = \sqrt{\left(\sqrt{5}\right)^2 - \left(\frac{4}{\sqrt{5}}\right)^2} = \sqrt{5 - \frac{16}{5}} = \sqrt{\frac{9}{5}} = \frac{3\sqrt{5}}{5}$$

۱۷ - گزینه ۲ راهنمایی: فاصله AB برابر قطر دایره و وسط AB مرکز دایره است.

اول: مرکز دایره وسط AB است:

$$A(2, -2), B(6, 4) \Rightarrow O\left(\frac{2+6}{2}, \frac{-2+4}{2}\right) = O(4, 1)$$

دوم: شعاع دایره نصف طول AB است:

$$2r = AB = \sqrt{(6-2)^2 + (4+2)^2} = \sqrt{16 + 36} = \sqrt{52} = 2\sqrt{13} \Rightarrow r = \sqrt{13}$$

سوم: فاصله هر نقطه روی دایره از مرکز برابر با شعاع است.

بررسی گزینه‌ها:

گزینه ۱:

$$(4, 1), (3, 7) \Rightarrow \sqrt{(4-3)^2 + (1-7)^2} = \sqrt{1 + 36} = \sqrt{37}$$

گزینه ۲:

$$(4, 1), (7, 3) \Rightarrow \sqrt{(7-4)^2 + (3-1)^2} = \sqrt{9 + 4} = \sqrt{13}$$

گزینه ۳:

$$(4, 1), (6, 6) \Rightarrow \sqrt{(6-4)^2 + (6-1)^2} = \sqrt{4 + 25} = \sqrt{29}$$

گزینه ۴:

$$(4, 1), (5, 4) \Rightarrow \sqrt{(5-4)^2 + (4-1)^2} = \sqrt{1 + 9} = \sqrt{10}$$

۱۸ - گزینه ۳ دو خط موازی هستند پس شیب یکسان دارند، یعنی:



$$\frac{a}{6} = -\frac{b}{3} \rightarrow a = -2b$$

فاصله دو خط برابر ۳ است، پس داریم:

$$\frac{a}{6}x - y + 4 = 0, \quad -\frac{b}{3}x - y - 1 = 0$$

$$\rightarrow d = \frac{|c - c'|}{\sqrt{a^2 + b^2}} \rightarrow 3 = \frac{|4 - (-1)|}{\sqrt{(\frac{a}{6})^2 + (-1)^2}} \rightarrow \sqrt{(\frac{a}{6})^2 + 1} = \frac{5}{3}$$

$$\rightarrow (\frac{a}{6})^2 + 1 = \frac{25}{9} \rightarrow (\frac{a}{6})^2 = \frac{16}{9} \rightarrow (\frac{a}{6})^2 = (\frac{4}{3})^2$$

$$\Rightarrow \begin{cases} \frac{a}{6} = \frac{4}{3} \rightarrow a = 8, b = -4 \rightarrow ab = -32 \\ \frac{a}{6} = -\frac{4}{3} \rightarrow a = -8, b = 4 \rightarrow ab = -32 \end{cases}$$

توجه کنید فاصله دو خط موازی $ax + by + c = 0$ و $ax + by + c' = 0$ از رابطه $d = \frac{|c - c'|}{\sqrt{a^2 + b^2}}$ به دست می آید.

۱۹ - گزینه ۲ راهنمایی: شیب خط موردنظر را m در نظر بگیرید.

اول: خط موردنظر را با شیب m در نظر می گیریم. از نقطه $A(1, 2)$ می گذرد:

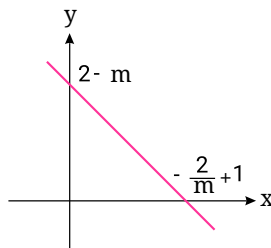
$$y - 2 = m(x - 1)$$

دوم: محل برخورد تابع را با محورهای مختصات می یابیم:

$$y = 0 \Rightarrow -2 = m(x - 1) \Rightarrow x - 1 = -\frac{2}{m} \Rightarrow x = -\frac{2}{m} + 1$$

$$x = 0 \Rightarrow y = 2 - m$$

پس نمودار خط به شکل روبه روست:



سوم: مساحت تشکیل شده برابر است با:

$$S = \frac{(2-m)(-\frac{2}{m} + 1)}{2} = \frac{9}{2} \Rightarrow -\frac{4}{m} + 2 + 2 - m = 9$$

$$\Rightarrow \frac{-4 - m^2 - 5m}{m} = 0 \Rightarrow m^2 + 5m + 4 = 0 \Rightarrow (m+1)(m+4) = 0 \Rightarrow \begin{cases} m = -1 \\ m = -4 \end{cases}$$

پس دو خط با ویژگی موردنظر داریم.

۲۰ - گزینه ۳ نکته: از سالهای قبل می دانیم که از به هم وصل کردن متوالی وسطهای اضلاع یک مستطیل، یک لوزی حاصل می شود که مساحت لوزی، نصف مساحت مستطیل است.

فاصله نقطه $(4, -1)$ از دو خط داده شده، طول و عرض مستطیل را به ما می دهد. داریم:

$$A(4, -1), d_1 : 2x - y = 5 \rightarrow \text{فاصله} = \frac{|8 + 1 - 5|}{\sqrt{5}} = \frac{4}{\sqrt{5}} \text{ طول}$$

$$A(4, -1), d_2 : 2y + x = 3 \rightarrow \text{فاصله} = \frac{|-2 + 4 - 3|}{\sqrt{5}} = \frac{1}{\sqrt{5}} \text{ عرض}$$



$$\text{مساحت مستطیل} = \frac{4}{\sqrt{5}} \times \frac{1}{\sqrt{5}} = \frac{4}{5}$$

$$\text{مساحت لوزی} = \frac{1}{2} \times \frac{4}{\sqrt{5}} = \frac{4}{10}$$

۲۱ - گزینه ۳ راهنمایی: اگر طول قطر مربع d باشد، مساحت آن $\frac{d^2}{2}$ است.

فاصله رأس از قطر همان نصف طول قطر است، پس داریم:

$$\begin{cases} A(3, -2) \\ y + x = 0 \end{cases} \Rightarrow AH = \frac{|-2 + 3|}{\sqrt{1^2 + 1^2}} = \frac{1}{\sqrt{2}}$$

پس طول قطر مربع $\sqrt{2} = \sqrt{2} \left(\frac{1}{\sqrt{2}} \right) = 2$ است و مساحت مربع ۱ است. $S = \frac{d^2}{2} = \frac{(\sqrt{2})^2}{2} = 1$ است.

۲۲ - گزینه ۳ نقطه O وسط پاره خط AB است و داریم:

$$\begin{cases} x_O = \frac{x_A + x_B}{2} \rightarrow 2 = \frac{a + x_B}{2} \rightarrow x_B = 4 - a \\ y_O = \frac{y_A + y_B}{2} \rightarrow -1 = \frac{4 + y_B}{2} \rightarrow y_B = -6 \end{cases} \rightarrow B \begin{vmatrix} 4 - a \\ -6 \end{vmatrix}$$

$$x + 2y - 3 = 0 \rightarrow d = \frac{\sqrt{5}}{5} = \frac{|4 - a + 2(-6) - 3|}{\sqrt{1^2 + 2^2}} \rightarrow \frac{\sqrt{5}}{5} = \frac{|a + 11|}{\sqrt{5}}$$

$$\rightarrow |a + 11| = 1 \rightarrow \begin{cases} a + 11 = 1 \rightarrow a = -10 \\ a + 11 = -1 \rightarrow a = -12 \end{cases} \rightarrow \text{مجموع مقادیر ممکن} : -10 - 12 = -22$$

۲۳ - گزینه ۲ چون نقطه A قرینه نقطه A' نسبت به مبدأ مختصات است، پس مبدأ مختصات یعنی نقطه $O(0, 0)$ وسط پاره خط AA' است و داریم:

$$x_O = \frac{x_A + x_{A'}}{2} \rightarrow 0 = \frac{5 + k}{2} \rightarrow \boxed{k = -5}$$

$$y_O = \frac{y_A + y_{A'}}{2} \rightarrow 0 = \frac{-3k + 1 + m - 1}{2} \xrightarrow{k=-5} 15 + m = 0 \rightarrow \boxed{m = -15}$$

$$\rightarrow m - k = -15 - (-5) = -10$$

۲۴ - گزینه ۱ ارتفاع وارد بر ضلع BC ، عمود بر ضلع BC است پس شیب آن به صورت زیر به دست می آید:

$$m_{BC} = \frac{y_B - y_C}{x_B - x_C} = \frac{4 - 3}{5 - (-1)} = \frac{1}{6} \rightarrow m_{AH} = -6$$

معادله ارتفاع AH عبارت است از معادله خطی که شیب آن -6 است و از نقطه $A(2, 0)$ می گذرد:

$$y - 0 = -6(x - 2) \rightarrow y = -6x + 12$$

۲۵ - گزینه ۴ باتوجه به اینکه دو ضلع متوازی الاضلاع موازی و غیر منطبق هستند، داریم:

$$\begin{cases} ax + by + c = 0 \\ a'x + b'y + c' = 0 \end{cases} \xrightarrow{\text{موازی و غیرمنطبق}} \frac{a}{a'} = \frac{b}{b'} \neq \frac{c}{c'}$$

حال کافیت همین شرط را بررسی نمائیم:

$$\begin{cases} 4x - y + 2 = 0 \\ 4x - y + m^2 - 7 = 0 \end{cases} \rightarrow \frac{4}{4} \neq \frac{m^2 - 7}{2} \rightarrow m^2 - 7 \neq 2 \rightarrow m^2 \neq 9 \rightarrow m \neq \pm 3$$

پس m هر عددی می تواند باشد به جز ± 3 .

۲۶ - گزینه ۴ دو ضلع مقابل متوازی الاضلاع با هم موازیند:

$$\begin{cases} 4x + 6y = 6 \\ 4x + ky = 2 \end{cases} \rightarrow \frac{4}{4} = \frac{6}{k} \rightarrow k = 3 \rightarrow 4x + 3y = 2$$

$$\begin{array}{l|l} \text{محل برخورد با محورهای} & \\ \hline \rightarrow 4x + 0 = 6 \rightarrow x = \frac{6}{4} \rightarrow A \begin{vmatrix} \frac{3}{2} \\ 0 \end{vmatrix} & \\ y=0 & \end{array}$$



محل برخورد با محورهای

$$\xrightarrow{x=0} 0 + 6y = 6 \rightarrow y = 1 \rightarrow B \begin{vmatrix} 0 \\ 1 \end{vmatrix}$$

$$AB = \sqrt{\left(\frac{3}{4} - 0\right)^2 + (0 - 1)^2} = \sqrt{\frac{9}{16} + 1} = \sqrt{\frac{25}{16}} = \frac{5}{4}$$

$$8x + 6y = 6 \xrightarrow{\div 2} 4x + 3y = 3, \quad 4x + 3y = 2$$

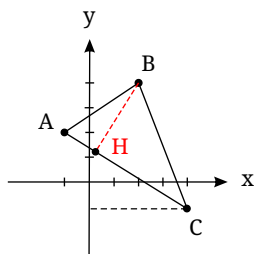
$$h = \frac{|3 - 2|}{\sqrt{4^2 + 3^2}} = \frac{1}{5}$$

$$S = \text{مساحت متوازی الاضلاع} = \text{ارتفاع} \times \text{قاعده} = \frac{1}{5} \times \frac{5}{4} = \frac{1}{4}$$

۲۷ - گزینه ۲

قدم اول رسم یک تصویر کلی از مثلث مورد نظر می باشد.

برای محاسبه مساحت باید طول ارتفاع BH و ضلع AC را محاسبه نماییم.



$$m_{AC} = \frac{y_C - y_A}{x_C - x_A} = \frac{-1 - 2}{4 - (-1)} = \frac{-3}{5}$$

$$AC \text{ ضلع: } y - y_0 = m(x - x_0) \rightarrow y - 2 = -\frac{3}{5}(x + 1) \rightarrow y = -\frac{3}{5}x - \frac{3}{5} + 2$$

$$\rightarrow 5y = -3x + 7 \rightarrow 3x + 5y - 7 = 0$$

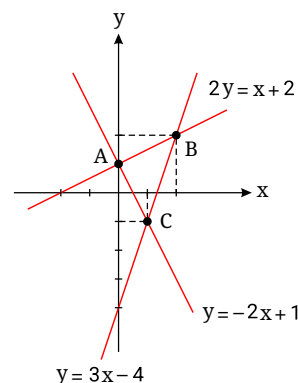
کافیست فاصله نقطه B را تا خط AC محاسبه نماییم

$$d = \text{طول ارتفاع BH} = \frac{|ax_0 + by_0 + c|}{\sqrt{a^2 + b^2}} = \frac{|3(2) + 5(2) - 7|}{\sqrt{3^2 + 5^2}} = \frac{19}{\sqrt{34}}$$

$$AC \text{ ضلع: } |AC| = \sqrt{(x_C - x_A)^2 + (y_C - y_A)^2} = \sqrt{(4 + 1)^2 + (-1 - 2)^2} = \sqrt{34}$$

$$S = \frac{1}{2} \times AC \times BH = \frac{1}{2} \times \frac{19}{\sqrt{34}} \times \sqrt{34} = \frac{19}{2}$$

۲۸ - گزینه ۲ سه خط را در یک محور مختصات رسم می کنیم و داریم:



$$m_{AB} = \frac{1}{2}, \quad m_{AC} = -2 \rightarrow AB \perp AC \rightarrow S_{\triangle ABC} = \frac{AB \times AC}{2}$$

$$A(0, 1), B(2, 2), C(1, -1)$$

$$\rightarrow AB = \sqrt{(2 - 0)^2 + (2 - 1)^2} = \sqrt{5}$$

$$AC = \sqrt{(0 - 1)^2 + (1 - (-1))^2} = \sqrt{5}$$

$$\rightarrow S_{\triangle ABC} = \frac{AB \times AC}{2} = \frac{\sqrt{5} \times \sqrt{5}}{2} = \frac{5}{2}$$



۲۹ - گزینه ۲ ارتفاع وارد بر ضلع AB از راس C رسم می‌شود، لذا اول باید معادله‌ی خط AB را محاسبه و سپس فاصله‌ی نقطه C را تا این خط محاسبه کنیم.

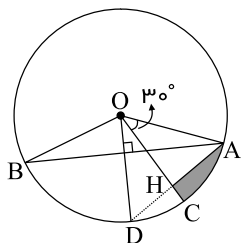
$$m_{AB} = \frac{y_B - y_A}{x_B - x_A} = \frac{2 - 4}{0 - 1} = \frac{-2}{-1} = 2$$

$$y - y_0 = m(x - x_0) \xrightarrow{m=2, B(0,2)} y - 2 = 2(x - 0) \rightarrow 2x - y + 2 = 0$$

حال محاسبه‌ی فاصله‌ی نقطه‌ی C تا این خط:

$$d = \frac{|ax_0 + by_0 + c|}{\sqrt{a^2 + b^2}} = \frac{|2(-1) - (-1) + 2|}{\sqrt{2^2 + (-1)^2}} = \frac{1}{\sqrt{5}} = \frac{\sqrt{5}}{5}$$

۳۰ - گزینه ۱



$$S = \pi \Rightarrow R = 1 \Rightarrow |OA| = 1 \Rightarrow |AH| = \frac{1}{2}|OA| = \frac{1}{2}$$

$$(OH)^2 + (AH)^2 = (OA)^2 \Rightarrow |OH|^2 = 1 - \frac{1}{4} = \frac{3}{4} \Rightarrow |OH| = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$AC \text{ طول کمان} = R\alpha = 1 \times \frac{\pi}{6} = \frac{\pi}{6} \quad |HC| = |OC| - |OH| = 1 - \frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$\text{اختلاف محیط‌ها} = \left(1 + \frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{2}\right) - \left(\frac{1}{2} + 1 - \frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{\pi}{6}\right) = \sqrt{3} - \frac{\pi}{6}$$

۳۱ - گزینه ۲

$$A(-3, -1), O(0, 0) \in d \rightarrow m_{d'} = \frac{y_A - y_O}{x_A - x_O} = \frac{-1 - 0}{-3 - 0} \rightarrow \boxed{m_{d'} = \frac{1}{3}}$$

$$\text{خط } d \text{ و } d' \text{ بر هم عمودند.} \rightarrow m_d = \frac{-1}{m_{d'}} = \frac{-1}{\frac{1}{3}} \rightarrow \boxed{m_d = -3}, \quad B(2, 4) \in d$$

$$\rightarrow y - y_B = m_d(x - x_B) \rightarrow y - 4 = -3(x - 2) \rightarrow \boxed{y = -3x + 10}$$

۳۲ - گزینه ۱ دو نقطه‌ی A و B هم‌طول هستند، پس:

$$\overline{AB} = \sqrt{(x_A - x_B)^2 + (y_A - y_B)^2} \quad \text{طول پاره‌خط } AB$$

$$AB = |y_A - y_B| = |5 - (-1)| = 6$$

$$AC = \sqrt{(7 - 3)^2 + (2 - 5)^2} = \sqrt{16 + 9} = 5$$

$$BC = \sqrt{(7 - 3)^2 + (2 - (-1))^2} = \sqrt{16 + 9} = 5$$

چون $BC = AC$ است، پس مثلث ABC متساوی‌الساقین است.

۳۳ - گزینه ۲ کافیست دوبار شعاع دایره را با استفاده از فاصله‌ی دو نقطه محاسبه نماییم.

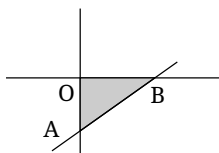
$$|OA| = |OB| \rightarrow \sqrt{(2\alpha - 0)^2 + (\alpha + 1 - 2)^2} = \sqrt{(2\alpha - 2)^2 + (\alpha + 1 - 0)^2}$$

$$\xrightarrow{()^2} 4\alpha^2 + \alpha^2 - 2\alpha + 1 = 4\alpha^2 - 4\alpha + 4 + \alpha^2 + 2\alpha + 1 \rightarrow -2\alpha + 1 = -6\alpha + 5$$

$$4\alpha = 4 \rightarrow \alpha = 1 \rightarrow |OA| = d = \sqrt{(2)^2 + 0^2} = 2$$

۳۴ - گزینه ۴ نکته: اگر خط d ، محورهای مختصات را در نقاط $A(0, y)$ و $B(x, 0)$ قطع کند مساحت محدود به این تابع و محورهای مختصات برابر $S = \frac{1}{2}|xy|$ است.

$$S_{OAB} = \frac{1}{2}|xy|$$



پس مجموع مقادیر m برابر ۱۶ می‌باشد.

$$y = (m+2)x + (4-m) \Rightarrow \begin{cases} x=0 : y=4-m \\ y=0 : x=-\frac{4-m}{m+2} \end{cases}$$

$$S = \frac{1}{2} \left| - (4-m) \left(\frac{4-m}{m+2} \right) \right| = \frac{1}{2} \left| \frac{(4-m)^2}{m+2} \right| = 4 \Rightarrow 8 = \left| \frac{16 - 8m + m^2}{m+2} \right|$$

$$\Rightarrow \begin{cases} 8(m+2) = 16 - 8m + m^2 \Rightarrow m^2 - 16m = 0 \Rightarrow m=0, m=16 \\ -8(m+2) = 16 - 8m + m^2 \Rightarrow m^2 + 32 = 0 \end{cases}$$

ریشه حقیقی ندارد :

۳۵ - گزینه ۱ شیب خط $y = 2x + 5$ برابر $m = 2$ است، بنابراین خطی که موازی این خط رسم می‌شود شیبی برابر $m = 2$ خواهد داشت و داریم:

$$A \begin{vmatrix} a \\ 2a+1 \end{vmatrix}, m=2$$

$$\rightarrow y - (2a+1) = 2(x-a) \rightarrow y - 2a - 1 = 2x - 2a \rightarrow y = 2x + 1$$

$$B \begin{vmatrix} \alpha \\ \beta \end{vmatrix} \rightarrow \beta = 2\alpha + 1 \rightarrow \beta - 1 = 2\alpha \rightarrow \alpha = \frac{\beta - 1}{2}$$

۳۶ - نکته: معادله خطی با شیب m که از نقطه $A(x_0, y_0)$ عبور می‌کند به صورت $y - y_0 = m(x - x_0)$ است.

$$2x - y = 3 \Rightarrow \text{شیب} = -\frac{2}{-1} = 2$$

خط مورد نظر با خط $2x - y = 3$ موازی است، پس شیب آن برابر با شیب این خط و در نتیجه $m = 2$ می‌باشد.

$$y = -x \xrightarrow{y=5} 5 = -x \Rightarrow x = -5$$

بنابراین می‌خواهیم معادله خطی با شیب $m = 2$ را بنویسیم که از نقطه $A(-5, 5)$ عبور می‌کند:

$$y - y_0 = m(x - x_0) \Rightarrow y - 5 = 2(x + 5) \Rightarrow y = 2x + 15 \Rightarrow a + b = 15$$

۳۷ - گزینه ۱ چون سه نقطه روی یک خط قرار دارند، داریم:

$$m_{AB} = m_{AC} \rightarrow \frac{-2-k}{4-(-1)} = \frac{-2-1}{4-3} \rightarrow -\frac{k+2}{5} = -\frac{3}{1} \rightarrow k+2 = 15 \rightarrow \boxed{k=13} \rightarrow B(-1, 13)$$

$$AB = \sqrt{(x_A - x_B)^2 + (y_A - y_B)^2} = \sqrt{(4+1)^2 + (-2-13)^2} = \sqrt{25 + 225} = \sqrt{250} \rightarrow AB = \sqrt{25 \times 10} \rightarrow \boxed{AB = 5\sqrt{10}}$$

۳۸ - گزینه ۲ در مستطیل قطرها یکدیگر را نصف می‌کنند، بنابراین داریم:

$$\begin{cases} x_A + x_C = x_B + x_D \rightarrow 1-3 = -4 + x_D \rightarrow x_D = 2 \\ y_A + y_C = y_B + y_D \rightarrow \frac{3}{2} - 3 = -1 + y_D \rightarrow y_D = -\frac{1}{2} \end{cases} \Rightarrow D(2, -\frac{1}{2})$$

اکنون گزینه‌ها را چک می‌کنیم:

$$1 \text{ گزینه } : 3(-\frac{1}{2}) = 4(2) + 8 \rightarrow -\frac{3}{2} \neq 16$$

$$2 \text{ گزینه } : 6(-\frac{1}{2}) = 4(2) - 11 \rightarrow -3 = -3 \quad \checkmark$$

$$3 \text{ گزینه } : -\frac{1}{2} = 2 + \frac{3}{2} \rightarrow -\frac{1}{2} \neq \frac{7}{2}$$

$$4 \text{ گزینه } : -\frac{1}{2} = 2(2) - \frac{3}{2} \rightarrow -\frac{1}{2} \neq \frac{5}{2}$$



۳۹ - گزینه ۱. باتوجه به این که اضلاع چهارضلعی موازی هستند، دو خط مطرح شده موازی و دارای شیب یکسان می‌باشند داریم:

$$\begin{aligned} -x + y = 2 &\rightarrow y = x + 2 \\ 2x + ay = 4 &\rightarrow y = -\frac{2}{a}x + \frac{4}{a} \rightarrow -\frac{2}{a} = 1 \rightarrow a = -2 \end{aligned}$$

برای محاسبه فاصله دو خط موازی ابتدا معادلات باید شبیه یکدیگر شوند.

$$\begin{cases} -x + y = 2 \\ 2x - 2y = 4 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 2x - 2y + 4 = 0 \\ 2x - 2y = 4 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 2x - 2y + 4 = 0 \\ 2x - 2y - 4 = 0 \end{cases} \rightarrow a = 2, b = -2, c = 4, c' = -4$$

با استفاده از فرمول فاصله دو خط موازی جواب را محاسبه می‌نماییم.

$$d = \frac{|c - c'|}{\sqrt{a^2 + b^2}} = \frac{|4 - (-4)|}{\sqrt{2^2 + (-2)^2}} = \frac{8}{\sqrt{8}} = \sqrt{8} \rightarrow AD = AB = \sqrt{8} \text{ مربع}$$

چون مثلث متساوی‌الساقین است پس H وسط AB قرار دارد و می‌توان گفت:

$$AH = HB = \frac{\sqrt{8}}{2}$$

$$S = 2S_{\triangle ADH} = 2 \times \frac{1}{2} \times AD \times AH = \sqrt{8} \times \frac{\sqrt{8}}{2} = 4$$

۴۰ - گزینه ۲

راه حل اول:

برای به‌دست آوردن فاصله دو خط موازی کافیست یک نقطه‌ی دلخواه روی یکی از خطوط در نظر بگیرید و فاصله‌ی آن را از خط دیگر به‌دست آورید.

نقطه‌ی $M(8, 4)$ در معادله‌ی خط $5x - 12y + 8 = 0$ صدق می‌کند، فاصله‌ی M از خط $10x + 24y + 10 = 0$ برابر است با:

$$d = \frac{|-10 \times (8) + 24 \times (4) + 10|}{\sqrt{10^2 + 24^2}} = \frac{|26|}{26} = 1$$

راه حل دوم:

ابتدا با تغییراتی معادلات هر خط را به یک فرم تبدیل می‌نماییم.

$$\begin{aligned} -10x + 24y + 10 = 0 &\xrightarrow{\div(-2)} 5x - 12y - 5 = 0 \rightarrow a = 5, b = -12, c = -5, c' = 8 \\ 5x - 12y - 5 = 0 &\rightarrow a = 5, b = -12, c = -5, c' = 8 \end{aligned}$$

حال با استفاده از رابطه زیر فاصله دو خط موازی را محاسبه می‌نماییم.

$$d = \frac{|c - c'|}{\sqrt{a^2 + b^2}} = \frac{|-5 - 8|}{\sqrt{5^2 + (-12)^2}} = \frac{13}{\sqrt{169}} = \frac{13}{13} = 1$$

۴۱ - گزینه ۳. اگر ۳ نقطه A و B و C روی یک خط راست باشند، باید شیب خطی که از A و B می‌گذرد با شیب خط گذرنده از B و C برابر باشد.

یعنی می‌توان گفت:

$$m_{AB} = m_{BC} \text{ یا } m_{AB} = m_{AC} \text{ یا } m_{AC} = m_{BC}$$

$$\left. \begin{aligned} \text{شیب } AB &= \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{(m+3) - (m-1)}{(2m) - (2m+1)} = \frac{4}{-1} \\ \text{شیب } BC &= \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{(m-1) - (4-2m)}{(2m+1) - (3m-1)} = \frac{3m-5}{-m+2} \end{aligned} \right\} \Rightarrow \frac{4}{-1} = \frac{3m-5}{-m+2} \Rightarrow \boxed{m=3}$$

پس مختصات نقطه D به صورت $D(1, 0)$ است.

با توجه به گزینه‌ها نقطه D روی خط $y = 5x - 5$ قرار دارد.

۴۲ - گزینه ۳. دو خط موازی‌اند اگر و تنها اگر شیب آن‌ها برابر باشد.

فاصله دو خط موازی $ax + by = c$ و $ax + by = c'$ برابر $\frac{|c - c'|}{\sqrt{a^2 + b^2}}$ است.

شیب دو خط داده‌شده برابر است، پس:

$$2x - my = 4 \Rightarrow my = 2x - 4 \Rightarrow y = \frac{2}{m}x - \frac{4}{m} \Rightarrow \text{شیب} = \frac{2}{m}$$

$$-4x + 2y = k \Rightarrow 2y = 4x + k \Rightarrow y = 2x + \frac{k}{2} \Rightarrow \text{شیب} = 2$$



$$\Rightarrow \frac{2}{m} = 2 \Rightarrow m = 1$$

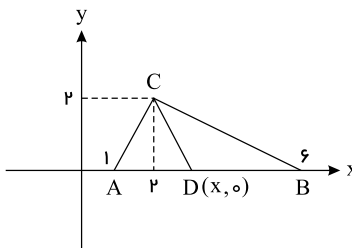
دو خط را به صورت زیر نوشته و فاصله بین آن‌ها را برابر $2\sqrt{5}$ قرار می‌دهیم.

$$\begin{cases} -4x + 2y = k \\ 2x - y = 4 \end{cases} \xrightarrow{\div(-2)} \begin{cases} -4x + 2y = k \\ 2x - y = -\frac{k}{2} \end{cases} \Rightarrow \frac{|4 + \frac{k}{2}|}{\sqrt{4+1}} = 2\sqrt{5}$$

$$m + k = 1 + 12 = 13 \text{ یا } m + k = 1 - 28 = -27 \Rightarrow \left| \frac{k}{2} + 4 \right| = 2 \times 5 \Rightarrow \frac{k}{2} + 4 = \pm 10 \Rightarrow \begin{cases} \frac{k}{2} + 4 = 10 \Rightarrow k = 12 \\ \frac{k}{2} + 4 = -10 \Rightarrow k = -28 \end{cases}$$

۴۳ - گزینه ۱

گام اول: شکل را رسم می‌کنیم:



گام دوم: معادله خطوط AC و BC را می‌یابیم. فاصله D از هر دو خط برابر است.

$$A(1, 0), C(2, 2) \Rightarrow AC: y - 0 = \frac{2-0}{2-1}(x-1) \Rightarrow y = 2x - 2$$

$$C(2, 2), B(6, 0) \Rightarrow BC: y - 0 = \frac{0-2}{6-2}(x-6) \Rightarrow y = -\frac{1}{2}x + 3$$

گام سوم: فاصله $D(x, 0)$ از هر دو خط:

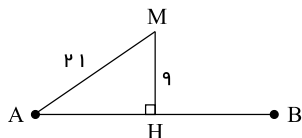
$$\begin{cases} y - 2x + 2 = 0 \\ y + \frac{1}{2}x - 3 = 0 \end{cases} \Rightarrow \frac{|-2x + 2|}{\sqrt{4+1}} = \frac{|\frac{1}{2}x - 3|}{\sqrt{\frac{1}{4}+1}}$$

$$\frac{|-2x + 2|}{\sqrt{5}} = \frac{|x - 6|}{\sqrt{5}} = \begin{cases} -2x + 2 = x - 6 \Rightarrow x = \frac{8}{3} \\ -2x + 2 = 6 - x \Rightarrow x = -4 \end{cases}$$

با توجه به شکل $x = \frac{8}{3}$ صحیح است.

۴۴ - گزینه ۲

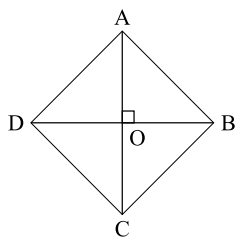
هر نقطه روی عمود منصف یک پاره خط از دو سر آن به یک فاصله است. بنابراین:



$$x^2 - x - 9 = 4x - 3 \Rightarrow x^2 - 5x - 6 = 0 \Rightarrow (x-6)(x+1) = 0 \Rightarrow \begin{cases} x = 6 & \text{قق} \\ x = -1 & \text{غقق} \end{cases} \xrightarrow{x=6} 4x - 3 = 21$$

$$AH^2 + 9^2 = 21^2 \Rightarrow AH^2 = 441 - 81 = 360 \xrightarrow{AH > 0} AH = 6\sqrt{10} \Rightarrow AB = 12\sqrt{10}$$

۴۵ - گزینه ۲ برای نوشتن معادله قطر AC به یک نقطه و شیب آن نیاز داریم. مختصات نقطه O که وسط پاره خط BD است و شیب آن که به علت عمود بودن بر BD ، قرینه معکوس شیب BD است.



$$m_{BD} = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} = \frac{4 - 1}{0 - 3} = -\frac{1}{3}$$

$$m_{AC} = -\frac{1}{m_{BD}} = \frac{1}{3}$$

$$O \text{ مختصات } : \left(\frac{x_B + x_D}{2}, \frac{y_B + y_D}{2} \right) = \left(\frac{3}{2}, 4 \right)$$

$$AC \text{ معادله قطر } : y - y_0 = m(x - x_0)$$

$$y - 4 = \frac{1}{3}(x - \frac{3}{2}) \Rightarrow y - 4 = \frac{1}{3}x - \frac{1}{2} \xrightarrow{x=0} y - 4 = 0 - \frac{1}{2} \Rightarrow y = \frac{7}{2} = 3.5$$

۴۶ - گزینه ۲ ابتدا فاصله دو نقطه A و B را که همان فاصله دو خط موازی $3x - 4y + 5 = 0$ و $3x - 4y + 15 = 0$ است را به دست می آوریم:

$$AB = \frac{|15 - 5|}{\sqrt{3^2 + (-4)^2}} = \frac{10}{5} = 2$$

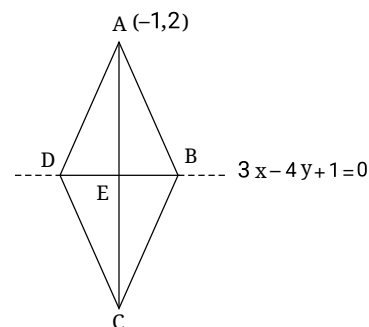
$$\text{طبق قضیه فیثاغورس} : AC^2 = AB^2 + BC^2 \rightarrow AC^2 = 2^2 + 4^2 \rightarrow AC^2 = 20 \rightarrow AC = 2\sqrt{5}$$

۴۷ - گزینه ۱ نقطه $A(-1, 2)$ در معادله قطر کوچک $(3x - 4y + 1 = 0)$ صدق نمی کند، بنابراین نقطه A روی قطر بزرگ قرار دارد و فاصله $A(-1, 2)$ از خط $3x - 4y + 1 = 0$ برابر نصف قطر بزرگ است داریم:

$$AE = \frac{|3(-1) - 4(2) + 1|}{\sqrt{3^2 + (-4)^2}} = \frac{10}{5} = 2$$

$$AC \rightarrow BE = 1 \quad (BD \times 2 = \text{قطر بزرگ})$$

$$\rightarrow AB^2 = AE^2 + BE^2 \rightarrow AB^2 = 2^2 + 1^2 \rightarrow AB = \sqrt{5} \rightarrow \text{محیط لوزی} = 4\sqrt{5}$$



۴۸ - گزینه ۴

$$d = \frac{|12(2) + 5(-3) - 15|}{\sqrt{12^2 + 5^2}} = \frac{6}{13} = \frac{6}{13} = \frac{6}{13} = \frac{6}{13}$$

$$\rightarrow \frac{6}{13} - 1 = \frac{6}{13} - \frac{13}{13} = -\frac{7}{13} \rightarrow \frac{6}{13} - 1 = \frac{6}{13} - \frac{13}{13} = -\frac{7}{13}$$

۴۹ - گزینه ۱ نقطه $A(3, -1)$ در معادله $y = x + 2$ صدق نمی کند. پس رأس A روی این خط قرار ندارد.

اندازهی ضلع مربع برابر با فاصله A تا خط $x - y + 2 = 0$ است و داریم:

$$a = 1, b = -1, c = 2$$

$$d = \frac{|3 - (-1) + 2|}{\sqrt{1 + 1}} = \frac{6}{\sqrt{2}}$$

$$S = \left(\frac{6}{\sqrt{2}} \right)^2 = \frac{36}{2} = 18$$

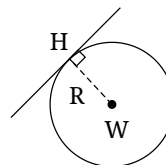
۵۰ - گزینه ۲ می دانیم شعاع دایره، در نقطه‌ی تماس بر خط مماس بر دایره عمود است. لذا برای به دست آوردن اندازهی شعاع دایره کافیت فاصله‌ی مرکز دایره به مختصات $(2, -1)$ تا خط

$$6x - 8y = 0 \text{ را محاسبه کنیم:}$$



$$a = 6, b = -8, c = 0, x_0 = 2, y_0 = -1$$

$$R = WH = \frac{|ax_0 + by_0 + c|}{\sqrt{a^2 + b^2}} = \frac{|6 \times (2) - 8 \times (-1)|}{\sqrt{6^2 + 8^2}} = \frac{20}{10} = 2$$



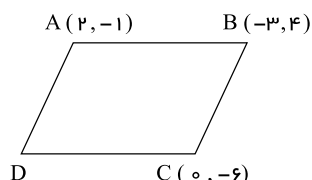
۵۱ - گزینه ۴ ابتدا باید شیب خط گذرنده بر AB را محاسبه نماییم.

$$m_{AB} = \frac{y_B - y_A}{x_B - x_A} = \frac{2m - n}{n + 1 - (2m + 1)} = \frac{2m - n}{n - 2m} = -1$$

دو خط عمود بر هم شیب‌های قرینه و معکوس هم دارند پس باید شیب خط مورد نظر ۱+ باشد که فقط گزینه‌ی ۴ این شیب را دارد.

$$(m + 1)y + 1 = (m + 1)x \rightarrow y = x + \frac{1}{m + 1}$$

۵۲ - گزینه ۱ در متوازی‌الاضلاع چون قطر‌ها منصف یکدیگرند. پس:



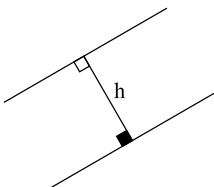
$$x_A + x_C = x_B + x_D$$

$$\Rightarrow 2 + 0 = -3 + x_D \Rightarrow x_D = 5$$

$$y_A + y_C = y_B + y_D \Rightarrow -1 - 6 = 4 + y_D \Rightarrow y_D = -11$$

$$D(5, -11) \Rightarrow OD = \sqrt{5^2 + (-11)^2} = \sqrt{25 + 121} = \sqrt{146}$$

۵۳ - گزینه ۳ نکته: فاصله دو خط موازی $ax + by + c = 0$ و $ax + by + c' = 0$ از رابطه $h = \frac{|c - c'|}{\sqrt{a^2 + b^2}}$ به دست می‌آید.

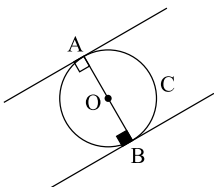


نکته: شعاع دایره در نقطه تماس، بر خط مماس بر دایره عمود است.

$$y = \frac{3}{4}x - 2 \xrightarrow{(\times 4)} 4y = 3x - 8 \Rightarrow 3x - 4y - 8 = 0 \Rightarrow \text{پس این دو خط موازی هستند}$$

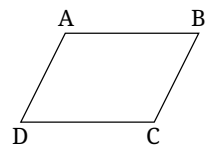
$$6x - 8y + 10 = 0 \xrightarrow{(\div 2)} 3x - 4y + 5 = 0$$

پاره خط AB قطر دایره است که همان فاصله دو خط موازی است.



$$AB = \frac{|-8 - 5|}{\sqrt{9 + 16}} = \frac{13}{5} \Rightarrow r = \frac{AB}{2} \Rightarrow r = 1,3$$

۵۴ - گزینه ۴ در متوازی‌الاضلاع $ABCD$ داریم:





$$x_A + x_C = x_B + x_D$$

$$y_A + y_C = y_B + y_D$$

با استفاده از نکته فوق داریم:

$$\left. \begin{aligned} 2 + 6 &= -3 + x_D \Rightarrow x_D = 11 \\ -4 - 1 &= 5 + y_D \Rightarrow y_D = -10 \end{aligned} \right\} \Rightarrow D(11, -10)$$

فاصله نقطه D از محور x ها برابر با $|y_D|$ و فاصله نقطه D از محور y ها برابر با $|x_D|$ است، پس خواسته سوال برابر است با:

$$|x_D| + |y_D| = |11| + |-10| = 11 + 10 = 21$$

۵۵ - گزینه ۱ برای یافتن فاصله دو خط موازی $ax + by + c = 0$ و $ax + by + c' = 0$ از فرمول زیر استفاده می‌کنیم:

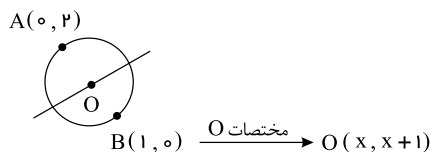
$$d = \frac{|c - c'|}{\sqrt{a^2 + b^2}}$$

$$\left\{ \begin{aligned} 4y &= 2 - 3x \Rightarrow 4y + 3x - 2 = 0 \\ 1 - y &= \frac{3x}{4} \xrightarrow{\times 4} 4 - 4y = 3x \Rightarrow 3x + 4y - 4 = 0 \end{aligned} \right. \Rightarrow d = \frac{|-2 - (-4)|}{\sqrt{3^2 + 4^2}} = \frac{2}{5}$$

اندازه قطر مربع برابر است با:

$$\text{اندازه قطر} = \sqrt{2} \times \frac{2}{5} = \frac{2\sqrt{2}}{5}$$

۵۶ - گزینه ۲



$$|OA| = |OB|$$

$$\sqrt{(x-0)^2 + (x+1-2)^2} = \sqrt{(x-1)^2 + (x+1-0)^2} \Rightarrow x^2 + (x-1)^2 = (x-1)^2 + (x+1)^2 \Rightarrow x^2 = (x+1)^2$$

$$x^2 = (x+1)^2 \Rightarrow x = \pm(x+1) \Rightarrow \begin{cases} x = x+1 \Rightarrow 0 \neq 1 & (\text{غ ق}) \\ x = -x-1 \Rightarrow x = -\frac{1}{2} & (\text{ق ق}) \end{cases}$$

$$O(-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}), A(0, 2)$$

$$\text{شعاع دایره} = |OA| \text{ یا } |OB| = \sqrt{(-\frac{1}{2}-0)^2 + (\frac{1}{2}-2)^2} = \sqrt{\frac{1}{4} + \frac{9}{4}} = \sqrt{\frac{10}{4}} = \frac{\sqrt{10}}{2}$$

۵۷ - گزینه ۱

ابتد نقطه‌ی وسط پاره خط AB را محاسبه می‌نماییم.

$$M \left\{ \begin{aligned} x_M &= \frac{x_A + x_B}{2} = \frac{x - 2 + x}{2} = x - 1 \\ y_M &= \frac{y_A + y_B}{2} = \frac{0 + 2x}{2} = x \end{aligned} \right.$$

در این مرحله فاصله‌ی دو نقطه مبدأ و M را محاسبه می‌نماییم و برابر $\sqrt{5}$ قرار می‌دهیم.

$$OM = \sqrt{(x_M - x_O)^2 + (y_M - y_O)^2} = \sqrt{(x-1)^2 + x^2} = \sqrt{5}$$

$$\rightarrow (x-1)^2 + x^2 = 5 \rightarrow 2x^2 - 2x - 4 = 0 \rightarrow x^2 - x - 2 = 0$$

$$\rightarrow (x-2)(x+1) = 0 \quad \begin{cases} x = -1 \\ x = 2 \end{cases}$$

۵۸ - گزینه ۱ دو خط داده شده موازی هستند، پس شیب آنها برابر است و داریم:



$$\left. \begin{array}{l} x - 3y = k \rightarrow \text{شیب} = \frac{1}{3} \\ 6y + mx = 5 \rightarrow \text{شیب} = -\frac{m}{6} \end{array} \right\} \Rightarrow -\frac{m}{6} = \frac{1}{3} \Rightarrow m = -2$$

حال فاصله دو خط موازی را یافته و برابر با $2\sqrt{10}$ قرار می‌دهیم.

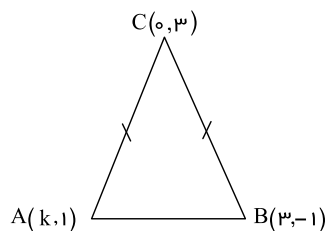
$$\left. \begin{array}{l} 6y - 2x = 5 \xrightarrow{\div(-2)} x - 3y = -\frac{5}{2} \\ x - 3y = k \end{array} \right\} \Rightarrow \frac{|k + \frac{5}{2}|}{\sqrt{1+9}} = 2\sqrt{10}$$

$$|k + \frac{5}{2}| = 2\sqrt{10} \times \sqrt{10} = 20 \Rightarrow k + \frac{5}{2} = \pm 20$$

$$\left. \begin{array}{l} k + \frac{5}{2} = 20 \Rightarrow k = 20 - \frac{5}{2} = \frac{35}{2} \\ k + \frac{5}{2} = -20 \Rightarrow k = -20 - \frac{5}{2} = -\frac{45}{2} \end{array} \right\} \Rightarrow \frac{35}{2} - (-\frac{45}{2}) = 40$$

۵۹ - گزینه ۳

طبق شکل فرضی مقابل باید $CA = CB$ باشد، پس داریم:



$$\begin{aligned} \sqrt{(k-0)^2 + (1-3)^2} &= \sqrt{(3-0)^2 + (-1-3)^2} \Rightarrow \sqrt{k^2 + 4} = \sqrt{9 + 16} = 5 \\ \Rightarrow k^2 + 4 &= 25 \Rightarrow k^2 = 21 \Rightarrow k = \pm\sqrt{21} \end{aligned}$$

۶۰ - گزینه ۴ ابتدا معادله خط گذرا از نقاط $A(2, 5)$ و $B(-2, -3)$ را می‌نویسیم:

$$\text{شیب خط } AB = \frac{y_B - y_A}{x_B - x_A} = \frac{-3 - 5}{-2 - 2} = 2$$

$$y - y_A = m(x - x_A) \xrightarrow[m=2]{A(2,5)} y - 5 = 2(x - 2) \Rightarrow y = 2x + 1$$

حال نقطه برخورد دو خط $y = 2x + 1$ و $y = x - 4$ را به دست می‌آوریم:

$$\begin{cases} y = 2x + 1 \\ y = x - 4 \end{cases} \Rightarrow 2x + 1 = x - 4 \Rightarrow x = -5 \Rightarrow y = -9$$

پس نقطه $(-5, -9)$ محل برخورد است و $\alpha\beta = 45$ می‌باشد.

پاسخنامه کلیدی

۱ - ۴	۱۰ - ۳	۱۹ - ۲	۲۸ - ۲	۳۷ - ۱	۴۶ - ۲	۵۵ - ۱
۲ - ۱	۱۱ - ۳	۲۰ - ۳	۲۹ - ۲	۳۸ - ۲	۴۷ - ۱	۵۶ - ۲
۳ - ۲	۱۲ - ۲	۲۱ - ۳	۳۰ - ۱	۳۹ - ۱	۴۸ - ۴	۵۷ - ۱
۴ - ۲	۱۳ - ۴	۲۲ - ۳	۳۱ - ۲	۴۰ - ۲	۴۹ - ۱	۵۸ - ۱
۵ - ۳	۱۴ - ۱	۲۳ - ۲	۳۲ - ۱	۴۱ - ۳	۵۰ - ۲	۵۹ - ۳
۶ - ۳	۱۵ - ۳	۲۴ - ۱	۳۳ - ۲	۴۲ - ۳	۵۱ - ۴	۶۰ - ۴
۷ - ۱	۱۶ - ۳	۲۵ - ۴	۳۴ - ۴	۴۳ - ۱	۵۲ - ۱	
۸ - ۱	۱۷ - ۲	۲۶ - ۴	۳۵ - ۱	۴۴ - ۲	۵۳ - ۳	
۹ - ۱	۱۸ - ۳	۲۷ - ۲	۳۶ - ۱	۴۵ - ۲	۵۴ - ۴	